

CAPITULO II

FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS

2.1 Generalidades del Método de los Elementos Discretos (MED)

El método de los elementos discretos simula el comportamiento mecánico de un medio formado por un conjunto de partículas las cuales interactúan entre sí a través de sus puntos de contacto. La disposición de las partículas dentro del conjunto global del sistema o medio es aleatoria, por lo que se puede formar medios con diferentes tamaños de partículas distribuidos a lo largo del conjunto, idealizando de este modo la naturaleza granular de los medios que usualmente se analiza y se simula mediante esta técnica numérica. Principalmente se pueden distinguir las siguientes propiedades básicas que definen de forma global y a grandes rasgos este método de análisis numérico:

- Las partículas como elementos discretos que en su conjunto conforman el sistema complejo de partículas.
- Estos elementos distintos como también se le conoce se desplazan independientemente uno de otros e interactúan entre sí en las zonas de contacto.
- En este método a nivel de cada partícula se hace uso de la mecánica del cuerpo rígido y los elementos discretos se consideran elementos rígido en sí.

El modelo constitutivo que define el comportamiento global del material es establecido en las zonas de contactos entre partículas. La caracterización de los contactos en el modelo se describe por los siguientes elementos mecánicos:

- Muelles: Los elementos muelles describen la fase de comportamiento elástico del medio en la zona de contacto entre cada partícula. Este comportamiento elástico queda caracterizado por dos muelles uno en la dirección de contacto normal y otro en la dirección tangencial, los cuales corresponden con la descomposición de fuerzas de contacto que se utilizan en la formulación del método
- Pistones: Por su parte los pistones son elementos que toman en cuenta la viscosidad del medio que se simula. En la formulación establecida indistintamente puede emplearse varios modelos de contacto que pueden ser delimitados en modelos de contacto viscoso y no viscoso, lo que permite aplicar el modelo a un gran número de problemas mecánicos, tanto elásticos como viscoelásticos.
- Elementos de fricción: Los elementos de fricción describen la descohesión y el fallo del material en la zona de contacto entre cada partícula. Cuando en el contacto, se produce la rotura, esta partícula se desprende del medio.

Como el medio es descrito por un sistema de partículas es necesario emplear la ecuación de balance de la cantidad de movimiento. Supóngase para ello de un sistemas discreto formado por n elementos distintos tal que cada partícula i tiene una masa m_i , que se mueve con una aceleración a_i y esta sometida a una fuerza f_i . En este caso la segunda ley de Newton establece que la fuerza que actúa sobre las partículas es igual a la masa de cada elemento distinto o discreto por su aceleración. Utilizando la definición de aceleración como la derivada de la velocidad material de la velocidad y teniendo en cuenta el principio de conservación de la masa (variación de la masa de la partícula es igual a cero) se tiene:

$$f_i = m_i a_i = m_i \frac{dv_i}{dt} = \frac{d}{dt}(m_i v_i)$$

Definiendo la cantidad de movimiento de la partícula como el producto de su masa por su velocidad (m_i, v_i), expresa que la fuerza que actúa sobre el elemento distinto es igual a la variación de la cantidad de movimiento de la misma. Aplicando este concepto y la segunda Ley de Newton al sistema de n partículas o elementos decretos se tiene:

$$R(t) = \sum_i f_i = \sum_i m_i a_i = \sum_i m_i \frac{dv_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i v_i \right)$$

partiendo del principio que se cumple el principio de conservación de la masa $\left(\frac{dm_i}{dt} = 0 \right)$

La ecuación anterior expresa que la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema discreto de partículas es igual a la variación por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento del mismo.

La ley de Newton proporciona la relación fundamental entre el movimiento del sistema de partículas y las fuerzas que causan dicho movimiento. El sistema de fuerzas puede estar en equilibrio estático cuando estas no están en movimiento o no actúan fuerzas sobre los diferentes elementos distintos o el medio en cuestión.

Las fuerzas, los desplazamientos, tensiones y deformaciones son determinados a nivel de cada contacto entre los elementos distintos. En correspondencia con el modelo constitutivo empleado estos elementos mecánicos son descompuestos en sus componentes normal y desviadoras.

La formulación establecida para el desarrollo del modelo mediante elementos discretos, adopta una serie de hipótesis que permiten simplificar el problema real desechando los aspectos menos significativos y permitiendo establecer un modelo físico y matemático del problema en estudio. Las hipótesis que se establecen son las siguientes:

1. Las partículas o elementos son consideradas como cuerpos rígidos.
2. El contacto ocurre en el punto o área muy pequeña de contacto entre cada partícula.
3. En las uniones entre partículas se considera que existe contacto entre los elementos discretos.
4. Todas las partículas son circulares. En 2D se emplean cilindros y en 3D esferas. Si embargo, la formulación puede considerar o emplear otros tipos de partículas con formas diversas y arbitrarias.
5. La generación del medio empleando elementos discretos debe ser aleatoria y los diámetros de los mismos deben ser tratados de forma similar (posición y diámetro de los elementos distintos aleatorio).
6. Se trabaja en el campo de las pequeñas deformaciones.
7. El comportamiento constitutivo en la zona de contacto emplea una tolerancia (separación / penetración) donde las partículas o elementos distintos se le permite cierto solape (gap o penetración) o separación en el punto de contacto lo que implica desde el punto de vista numérico un contacto aproximado.
8. La magnitud del solape (penetración o gap) y la separación está relacionada con la fuerza de contacto, la ley fuerza-desplazamiento (modelo constitutivo de contacto), y la magnitud de estos es pequeña con relación al tamaño de los elementos discretos o partícula.

Asumir que las partículas son elementos rígidos es bueno más cuando la deformación en un sistema físico es considerado a partir de los movimientos a lo largo de las interfaces o zona de contacto entre las partículas.

En la formulación del modelo se han incluido elementos rígidos o paredes a los cuales se le pueden imponer condiciones de contorno como velocidades impuestas, desplazamientos, fuerzas o el caso totalmente opuesto como restricciones de movimiento.

2.2 Generalidades del software empleado para la modelización usando el Método de los Elementos Discretos o Distintos (MED).

El DEMSim modela de movimiento e interacción de sistemas complejos de partículas rígidas circulares (2D) o esféricas (3D) usadas en el método de los elementos distintos (DEM). El MED fue introducido por Cundall [3] (1971) para el análisis de problemas de mecánica de rocas y con posterioridad se aplicó a los sólidos por Cundall y Strack [4] (1979).

En el DEMSim, la interacción de las partículas es abordada en el proceso de cálculo como un proceso dinámico con desarrollo de estados de equilibrio siempre y cuando exista un balance de las fuerzas interiores. La fuerza de contacto, los desplazamientos, tensiones y deformaciones relativas de una partículas del conjunto son encontradas o determinadas a través del movimientos que presentan las partículas individuales. Los movimientos son el resultado de la propagación a través del sistema de partículas de perturbaciones (condiciones de contorno impuestas: fuerzas, desplazamientos, velocidades, etc.) causadas por las paredes o por condiciones impuestas a los mismos elementos discretos. En este proceso dinámico la velocidad de propagación de las perturbaciones impuestas sobre el sistema de partículas dependen de la propiedades físicas y mecánicas del sistema discreto en cuestión.

El comportamiento dinámico del sistema de partículas es numéricamente representado por un algoritmo explícito con determinados paso de tiempo considerando que las velocidades y aceleraciones son constantes dentro de cada paso de tiempo. El DEM se basa en la idea de que el paso de tiempo escogido tiene que ser muy pequeño de forma tal que durante las propagación de una perturbación de una partícula a otra en un pasos de tiempo determinado no se puede propagar la misma mas allá que a los vecinos inmediatos de cada partícula. Este aspecto propicia que en todo momento, las fuerzas que actúan en cualquier partícula son exclusivamente determinadas por su interacción con las partículas que está en contacto. El paso de tiempo se asume en función de las propiedades físicas y mecánicas del medio lo que posibilita asegurar que la velocidad a que una perturbación determinada se propaga cumpla con las restricción y suposiciones anteriores.

El proceso de cálculo en el DEM se realiza alternando la aplicación de la segunda ley de Newton y una ley de fuerza-desplazamiento (ecuación constitutiva de contacto) en los contactos existentes entre cada elementos distinto que conforma el sistema de partículas. La segunda ley de Newton se usa para determinar el movimiento de cada partícula que se origina como resultado de la acción de las fuerza de contacto y las fuerzas volumétricas, mientras que la ley constitutiva (ley fuerza-desplazamiento) se emplea para actualizar las fuerzas originadas por el movimiento relativo en cada contacto. En los contactos esfera pared sólo se requiere aplicar la ley de fuerza-desplazamiento para cada contacto y no es necesario aplicar la ley de Newton porque en el caso de las paredes los movimiento son prefijados como condiciones impuestas.

2.3 Proceso de Cálculo del DEMSim.

El proceso del cálculo es un algoritmo cíclico o repetitivo que requiere la aplicación de la ley de movimiento a cada partícula, una ley del fuerza-desplazamiento en cada contacto, y una actualización constante de posiciones de las paredes. En cada paso de tiempo cambian de forma dinámica la estructura de contacto existente entre elementos distintos o entre las esferas y las paredes. Este aspecto implica tener un control estricto de los contacto en cada paso de tiempo, además de tener implementado un algoritmo eficiente que actualice constantemente los mismos durante el transcurso de la simulación. De forma muy simplificada el proceso de cálculo se ilustra en la figura siguiente:

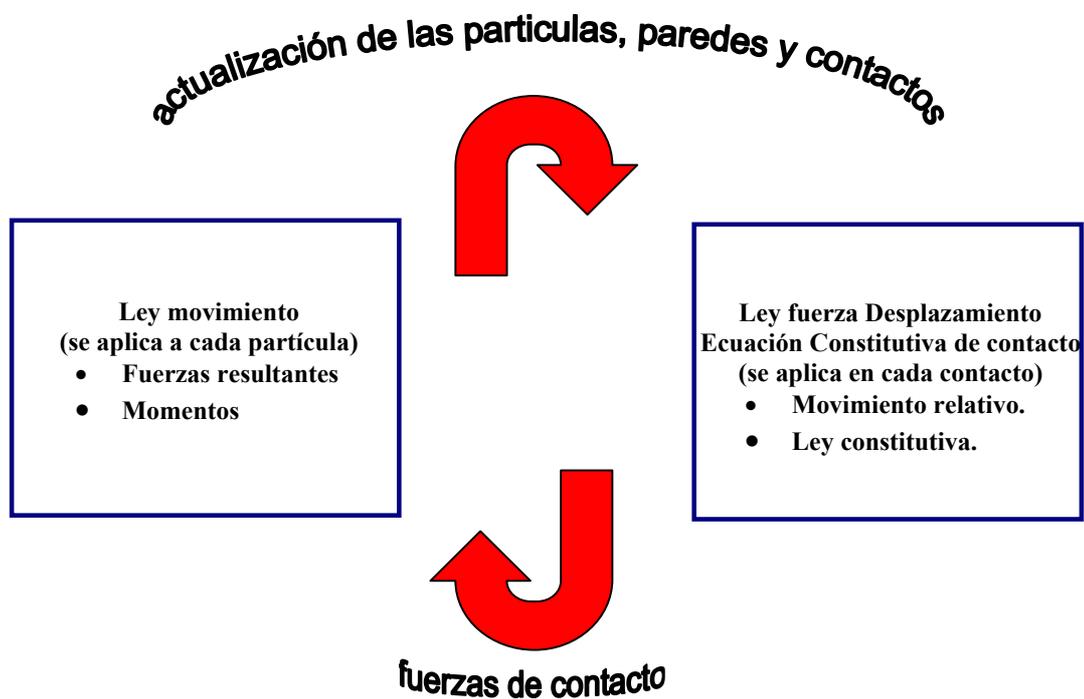


Figura 1: Proceso de cálculo

En el proceso de cálculo en cada instante de tiempo, los contactos se actualizan y son determinados los diferentes contactos entre esferas y esferas y pared, conociéndose además la posición de cada partícula y de las paredes. Por su parte la ley fuerza-desplazamiento es aplicada en cada contacto para actualizar las fuerzas basándose en el movimiento relativo entre las partículas en contacto y el modelo constitutivo empleado. Seguidamente, la ley de movimiento se aplica a cada partícula para actualizar su velocidad y la posición basada en las fuerzas y momentos resultantes que se origina como resultado de la acción de las fuerza de contacto y las fuerzas volumétricas en cada elementos distinto. Análogamente la posición de la pared se actualiza basándose en las velocidades especificada como condición impuesta.

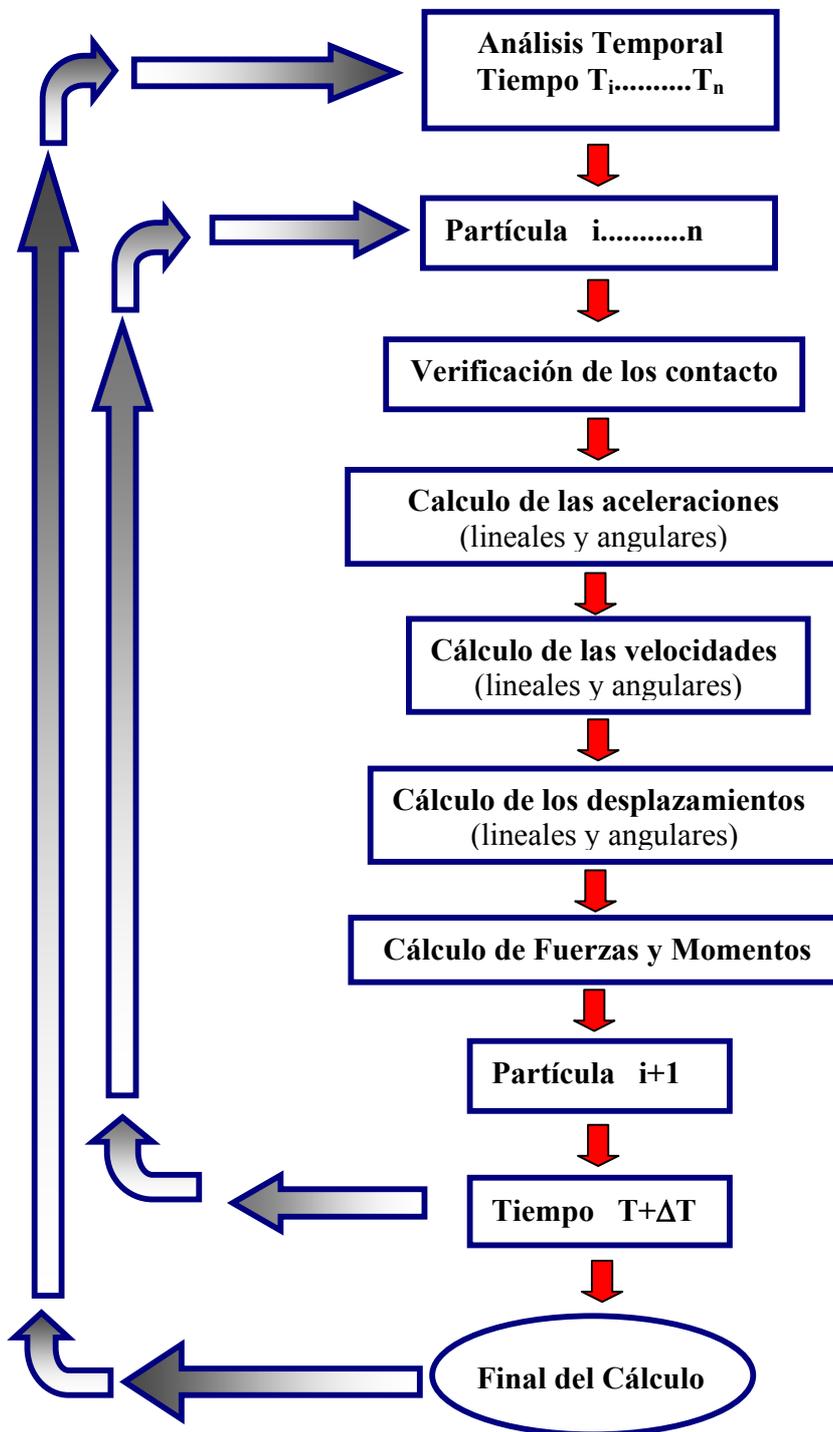


Figura 2: Fases del proceso de cálculo

2.4 Modelación empleando elementos esféricos discretos

La modelación numérica mediante el método de los elementos discretos es un medio eficaz para la realización de simulaciones de diversos problemas de ingeniería. En el modelo de partículas que se adopta para el estudio de desgaste, se pueden definir elementos en tres dimensiones y elementos en dos dimensiones. Para el caso en tres dimensiones, la formulación mediante elementos discretos se hace con esferas, mientras que para el caso bidimensional, la forma de las partículas son discos bidimensionales.

Este modelo considera el medio en estudio como discreto, para ello se asume que los elementos que conforman el medio son elementos independientes de cualquier configuración geométrica. En este caso el medio es generado con elementos de dimensiones y posición aleatorias. Los elementos esféricos utilizados (esferas y discos) son considerados elementos rígidos tal y como se describe originariamente en la formulación inicial del método propuesta por Cundall [3] [4].

De acuerdo con las hipótesis generales, se asume que la deformación del material se concentra en los puntos de contacto entre dichos elementos y se adopta una ley constitutiva de contacto para la definición del comportamiento mecánico que permite hasta cierto punto la penetración/separación de los elementos discretos. La ley del contacto puede verse como la formulación del modelo del material a un nivel microscópico.

En este caso la fundamentación física principal del modelo es que el material puede representarse como una colección de esferas rígidas que interactúan recíprocamente unas con las otras.

Las leyes del contacto apropiadas permiten obtener las propiedades macroscópicas deseadas de los materiales adoptándose un valor determinado según el material que se quiera modelizar, bien sea un acero o un suelo granular.

La modelización de medios mediante elementos esféricos rígidos es apropiada para la modelación de materiales granulares, geomateriales y otros. La hipótesis de considerar los elementos (esferas o discos) rígidos y concentrar la deformación en los punto de contacto entre ellos es una modelación adecuada para describir y caracterizar el comportamiento de los materiales (metales, terreno, rocas, suelo, etc) y el movimiento de las discontinuidades a nivel microscópico y macroscópico. Las deformaciones que se producen a nivel global es debida a la disminución o aumento de los huecos existentes entre partículas, adoptando por lo tanto gran importancia, la posición de las diferentes partículas, así como el tamaño de las mismas (radio en este caso particular). Por consiguiente este modelo también puede aplicarse para modelar el problema a diversas escalas (modelos multiescalas) en función de las dimensiones de los diversos elementos que conforman el medio. En la definición de las leyes de contacto entre elementos se incluye las fuerzas de cohesión y fricción, aspectos que permite modelar la fractura y la descohesión o pérdida de cohesión del material, lo cual permite poder llevar el material hasta la rotura. Esta consideración en el modelo permite a su vez delimitar las formación de micro-fisuras y fisuras que provocan al final el colapso de una estructura. Tener en cuenta en el modelo de contacto la cohesión y fricción del material

permite modelar materiales como rocas y suelos, que colapsarán, para ciertos rangos de esfuerzos, debido a la propagación de fisuras en el seno de los mismo.

2.5 Ecuaciones de movimiento.

El movimiento de los diferentes elementos discretos que conforman el modelo de partículas se rigen por las leyes de la dinámica de la mecánica del sólido rígido. La translación y la rotación de las partículas esféricas o cilíndricas rígidas se describen por medio de las ecuaciones de la dinámica de Newton-Euler. El movimiento del elemento i -ésimo del conjunto de elementos discretos se describe por las siguientes ecuaciones:

$$m_i \ddot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{F}_i \quad (1)$$

$$I_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{T}_i \quad (2)$$

donde :

\mathbf{u} - es el vector de desplazamiento del centroide del elemento en un sistema de coordenadas \mathbf{X} .

$\boldsymbol{\omega}$ - velocidad angular del elementos respecto a sistema de referencia móvil \mathbf{x} , con el elementos y el origen en el centro del mismo

m - masa del elemento o partícula i -ésimo.

I - momento de la inercia,

\mathbf{F} - fuerza resultante

\mathbf{T} - el momento resultante.

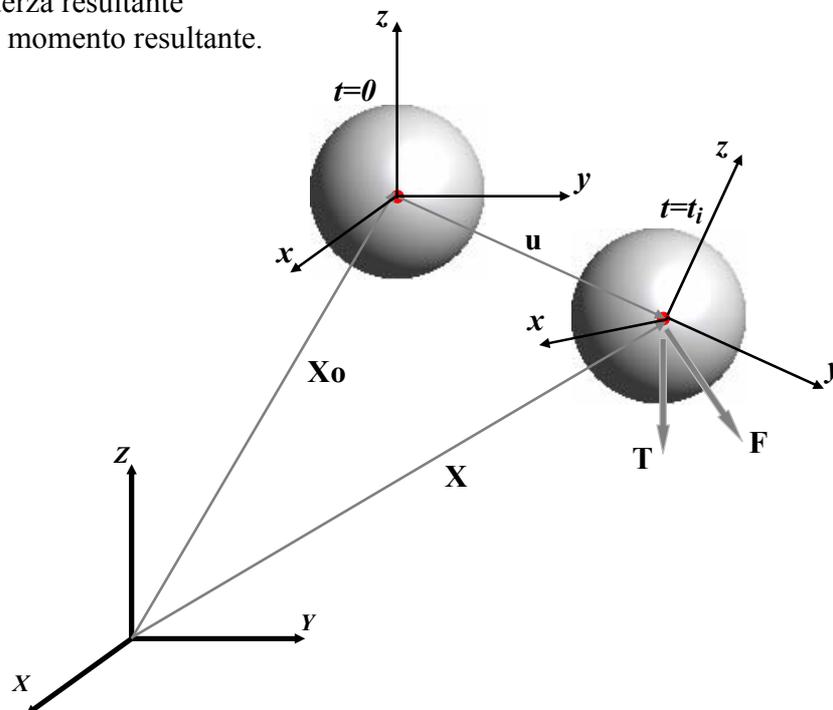


Figura 3: Movimiento de sólido rígido en un sistema de referencia espacial

La masa de cada elemento discreto se puede estimar conociendo de antemano la densidad de material y los diámetros o radios de cada una de las esferas que conforman el medio. Este cálculo de la masa puede realizar por:

$$m_i = \gamma V_i$$

donde:

γ - densidad micro del material.

V - Volumen.

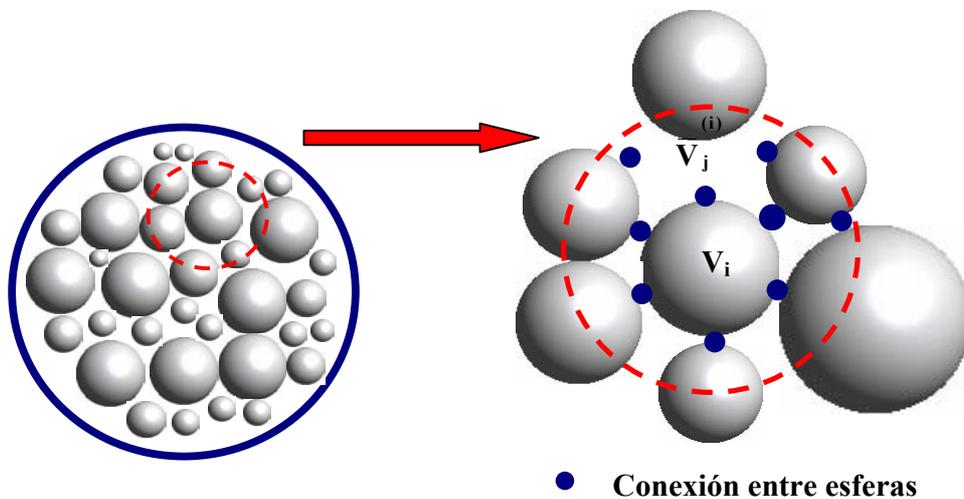


Figura 4: Definición del volumen de control para evaluar la densidad microestructural

En los modelos de partículas como su nombre lo indica, se discretiza el medio por elementos discretos esféricos, lo que propicia la formación de zonas de vacío o huecos que a su vez delimitan la porosidad del material. Esto implica que sea necesario tomar en cuenta este aspecto para el cálculo de la densidad micro-estructural. Para ello en cada partícula se define un volumen de control (V_c), lo que posibilita definir la densidad micro para cada elemento distinto:

$$\bar{\gamma}^{(i)} = \gamma \frac{V_c - V_o^{(i)}}{V_c}, \quad V_o^{(i)} = V_c - V_i - \sum V_j^{(i)}$$

$$V_i = \frac{4}{3} \pi r_i^3 \quad (3D - \text{esferas})$$

que para el caso de 2D se trabaja con el concepto de área de control (A_c) y queda definido por:

$$\bar{\gamma}^{(i)} = \gamma \frac{A_c - A_o^{(i)}}{A_c}, \quad A_o^{(i)} = A_c - A_i - \sum A_j^{(i)}$$

$$A_i = \pi r^2 \quad (2D - \text{cilindros})$$

El movimiento rotatorio se describe con respecto al corotacional de un sistema de coordenadas locales x incluido en cada elemento. El vector F y T son las sumas de todas las fuerzas y momentos aplicadas en el elemento i -ésimo debido a la carga externa, y a las interacciones de contacto entre las esferas, etc., así como a las fuerzas que son el resultado del amortiguamiento en el sistema.

Las ecuaciones de movimiento (1) y (2) se integran en el tiempo usando un esquema de diferencias finitas central. La integración del movimiento traslacional de los elementos discretos para el paso de tiempo n -ésimo se realiza como sigue:

$$\ddot{u}_i^n = \frac{F_i^n}{m_i} \quad (3)$$

$$\dot{u}_i^{n+\frac{1}{2}} = \dot{u}_i^{n-\frac{1}{2}} + \ddot{u}_i^n \Delta t \quad (4)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \dot{u}_i^{n+\frac{1}{2}} \Delta t \quad (5)$$

En el caso del movimiento rotacional también se emplea un esquema en diferencias finitas central lo que implica que para el caso de la velocidad y desplazamiento angular sea:

$$\dot{\omega}_i^n = \frac{T_i^n}{I_i} \quad (6)$$

$$\omega_i^{n+\frac{1}{2}} = \omega_i^{n-\frac{1}{2}} + \dot{\omega}_i^n \Delta t \quad (7)$$

Si se está estudiando el problema en 2D el ángulo de la rotación (θ) se puede obtener de modo similar al vector del desplazamiento u_i (5):

$$\theta_i^{n+1} = \theta_i^n + \omega_i^{n+\frac{1}{2}} \Delta t \quad (8)$$

En el caso del movimiento tridimensional, la matriz de rotación define el cambio de coordenadas del sistema de referencia móvil en cada paso de tiempo x_i respecto al sistema de referencia fijo X_i :

$$\mathbf{X} = \Lambda_i \mathbf{x}_i \quad (9)$$

La matriz de rotación se formula para cada paso de tiempo [5], [6] por:

$$\Delta \theta = \omega_i^{n+\frac{1}{2}} \Delta t \quad (10)$$

$$\Delta \Lambda_i = \cos \|\Delta \theta_i\| \mathbf{1} + \frac{\sin \|\Delta \theta_i\|}{\|\Delta \theta_i\|} \Delta \tilde{\theta}_i + \frac{1 - \cos \|\Delta \theta_i\|}{\|\Delta \theta_i\|^2} \Delta \theta_i \Delta \theta_i^T \quad (11)$$

$$\Lambda_i^{n+1} = \Delta \Lambda_i \Lambda_i^n \quad (12)$$

donde:

$\Delta \theta = \{\Delta \theta_x, \Delta \theta_y, \Delta \theta_z\}^T$ denota el vector de rotación incremental,

$\Delta \Lambda$ es la matriz rotacional incremental,

$\Delta \tilde{\theta}_i$ es una matriz ansimétrica con respecto a la diagonal principal, definida como:

$$\Delta \tilde{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\Delta \theta_z & \Delta \theta_y \\ \Delta \theta_z & \mathbf{0} & -\Delta \theta_x \\ -\Delta \theta_y & \Delta \theta_x & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (13)$$

La integración explícita en el tiempo presenta una alta eficiencia computacional y no es incondicionalmente estable. La desventaja del esquema de la integración explícito es conocida, su estabilidad numérica condicional impone una limitación en el paso o discretización del tiempo. Para cumplir con la estabilidad del método es necesario que el paso de tiempo sea menor o igual al tiempo crítico:

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{critico}} \quad (14)$$

Para calcular el tiempo critico es necesario determinar la frecuencia natural más alta o mayor del sistema ω_{max} :

$$\Delta t_{\text{critico}} = \frac{2}{\omega_{\text{max}}} \quad (15)$$

Si existe el amortiguamiento, el incremento de tiempo crítico se da por:

$$\Delta t_{\text{critico}} = \frac{2}{\omega_{\text{max}}} \left(\sqrt{1 + \xi^2} - \xi \right) \quad (16)$$

donde:

ξ - es el fracción del amortiguamiento crítico que corresponde a la frecuencia más alta ω_{\max} .

La determinación exacta de la frecuencia más alta o mayor ω_{\max} requiere la solución de un problema de auto valores definido para el sistema de n partículas rígidas conectadas entre sí. En un procedimiento de solución aproximado, pueden definirse los problemas de autovalores separadamente para cada elemento distinto usando las ecuaciones linealizada del movimiento:

$$\mathbf{m}_i \ddot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{k}_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0} \quad (17)$$

donde

$$\mathbf{m}_i = \{m_i, m_i, m_i, I_i, I_i, I_i\}^T, \quad \mathbf{r}_i = \{(u_x)_i, (u_y)_i, (u_z)_i, (\theta_x)_i, (\theta_y)_i, (\theta_z)_i\}^T \quad (18)$$

\mathbf{k}_i la matriz rigidez que toma en cuenta la contribución o el aporte de todas las partículas i .

La ecuación (18) define los vectores \mathbf{m}_i y \mathbf{r}_i para una partícula esférica en el espacio tridimensional. Para una partícula cilíndrica en un modelo bidimensional se definen como sigue:

$$\mathbf{m}_i = \{m_i, m_i, I_i\}^T, \quad \mathbf{r}_i = \{(u_x)_i, (u_y)_i, (\theta_z)_i\}^T \quad (19)$$

La ecuación (17) conduce a resolver el problema de autovalores siguiente:

$$\mathbf{k}_i \mathbf{r}_i = \mathbf{m}_i \lambda_i \mathbf{r}_i \quad (20)$$

donde los autovalores λ_j ($j \in \{1, \dots, 6\}$ en el caso de 3D, y para el caso de 2D $j \in \{1, \dots, 3\}$) son los cuadrados de la frecuencias de vibraciones libres:

$$\lambda_j = \omega_j^2 \quad (21)$$

En los problemas de 3D, tres de las seis frecuencias son de translación, y el otras tres de rotación, mientras que en 2D dos frecuencias son de traslación y una de rotación.

Una forma de simplificar el problema de autovalores para el cálculo de la frecuencia máxima ω_{\max} puede ser estimar la misma como la máxima frecuencias natural de un sistemas masa-resorte definido para todas las partículas con una translación y un rotación por grado de libertad. Las translaciones y la rotaciones de las vibraciones libre son gobernadas por las ecuaciones siguientes:

$$\mathbf{m}_i \ddot{\mathbf{u}}_{ni} + \mathbf{k}_n \mathbf{u}_{ni} = \mathbf{0} \quad (22)$$

$$I_i \ddot{\theta}_{ni} + \mathbf{k}_\theta \mathbf{u}_{ni} = \mathbf{0} \quad (23)$$

donde se asume que el movimiento de traslación es debido a la interacción de contacto en la dirección normal (\mathbf{k}_n es la rigidez elásticas del contacto en la dirección normal), y el movimiento rotacional a la interacción en el sentido tangencial (\mathbf{k}_T rigidez elásticas del contacto en la dirección tangencial al mismo). Dado la restricción tangencial, puede mostrarse que la rigidez rotatoria puede obtenerse como:

$$\mathbf{k}_\theta = \mathbf{k}_T r^2 \quad (24)$$

donde r es la longitud del vector que conecta el centro de masa de los puntos en contacto

La frecuencia natural de las vibraciones de traslación vienen dadas por la ecuación siguiente:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\mathbf{k}_n}{m_i}} \quad (25)$$

mientras la frecuencia rotacional puede obtenerse por la fórmula

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{\mathbf{k}_\theta}{I_i}} \quad (26)$$

Como la inercia rotacional es:

$$I = \frac{2}{5} m r^2 \quad (3D, \text{esferas}) \quad (27)$$

$$I = \frac{m r^2}{2} \quad (2D, \text{discos}) \quad (28)$$

y \mathbf{k}_θ esta dado por la ecuación (24), la frecuencia rotacional puede calcularse como:

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{5\mathbf{k}_T}{2m_i}} \quad (3D, \text{esferas}) \quad (29)$$

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{2\mathbf{k}_T}{m_i}} \quad (2D, \text{discos}) \quad (30)$$

Si $\mathbf{k}_T = \mathbf{k}_n$ la frecuencia rotacional ω_θ es considerablemente mayor que la frecuencia de traslación ω_n obtenido por la ecuación (25), como resultado el incrementos del tiempo critico tiene que ser menor que la obtenida por la ecuación (15). Para evitar la determinación de un paso de tiempo crítico con las frecuencias rotacional, es necesario escalar adecuadamente las condiciones de inercia rotatorias.

2.6 Evaluación de las fuerzas de contacto

La posición de cada partícula en el dentro del medio que forma, describe una serie de contactos entre ellas, los cuales han de ser determinados. La búsqueda de dichos contactos se hace a través de una algoritmo de búsqueda de contacto, el cual se define en párrafos posteriores del presente documento. Por lo tanto, existen unos puntos de contacto entre partículas, y dichos puntos son donde se concentran las fuerzas que se generan entre partículas. Para el caso práctico de considerar dos partículas, las cuales se hallan en contacto entre sí, y por lo tanto se genera una fuerza entre ellas y ubicada en dicho punto, la magnitud de la mencionada fuerza y su descripción, puede formularse tal y como se muestra seguidamente.

La interacción entre estas se puede representar por la aplicación de las tercera ley de Newton. Se define la fuerza de contacto que ejerce un elemento sobre otro, y viceversa representándolas por los términos \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 , que por principio de acción-reacción satisfacen las relación siguientes:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad (31)$$

2.6.1 Descomposición de las fuerzas de contacto.

2.6.1.1 Descomposición vectorial.

Las fuerzas de contacto que definen el comportamiento y la interacción entre dos partículas pueden descomponerse de acuerdo con un sistema de ejes cartesianos local en dos componentes. La descomposición se hace en una componente normal y una componente tangencial.

La dirección normal se adopta como la definida por el eje que une los dos centros de las partículas esféricas. Asimismo, la dirección tangencial, es la perpendicular al mencionado eje.

Por lo tanto puede escribirse dichas descomposición de las fuerzas (\mathbf{F}_1 o \mathbf{F}_2 que ahora se denota por \mathbf{F}) en sus componentes normales y tangenciales, F_n y F_T , respectivamente, de la siguiente forma:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_T = F_n \mathbf{n} + \mathbf{F}_T \quad (32)$$

donde:

\mathbf{n} - es el vector de la unitario normal a la superficie de la partícula en el punto del contacto (por tanto, para elementos esféricos o discos tiene la dirección de la recta que une las dos partículas y su dirección es apuntando hacia afuera respecto la partícula 1).

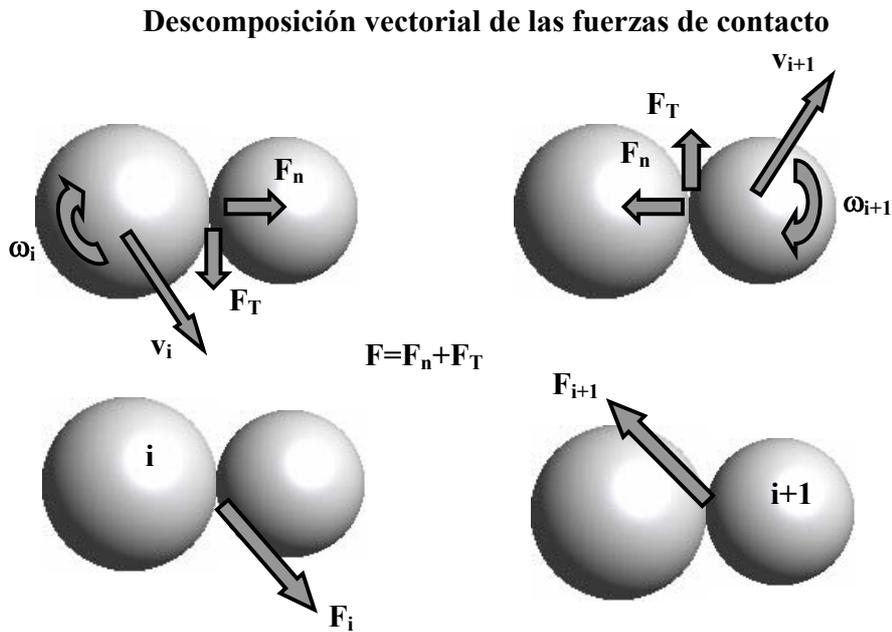


Figura 5: Descomposición de las fuerzas en sus componentes normal y tangencial.

La fuerza de contacto F_n y F_T se obtiene usando el modelo constitutivo empleado para describir el comportamiento en el contacto entre dos esferas rígidas. En este caso se han formulado dos modelos de contacto: uno con comportamiento viscoso y otro no viscoso (figura 6), tal y como se muestra en los apartados posteriores del presente documento.

Estos modelos quedan caracterizados por diferentes elementos que describen la parte elástica y plástica del comportamiento del material y en el caso específico del modelo viscoso existe un pistón que describe el comportamiento viscoso del contacto. Se puede así estudiar un variado y extenso número de problemas de ingeniería, lo cual le confiere al método una gran versatilidad.

2.6.1.2 Descomposición según el comportamiento constitutivo.

Para el estudio del contacto las fuerzas han sido descompuestas en su componente normal y tangencial, en consecuencia, la formulación del modelo constitutivo de contacto, se describe de forma análoga, caracterizándose la interfase del contacto de la siguiente forma:

- Para el caso elástico (modelo no viscoso): El modelo de contacto se describe mediante una rigidez normal k_n y una rigidez tangencial k_T . Dichas rigideces, junto con la adopción de un criterio de rotura, define el comportamiento de los contactos entre partículas, y por lo tanto, considerando todas las partículas que conforman el medio, se define el comportamiento de éste.

- Para el caso viscoelástico (modelo viscoelástico): Además de las rigideces normal k_n y tangencial k_T descritas para el caso elástico, se añade al modelo, un pistón en la dirección normal cuyas características describen el comportamiento viscoso del material. Las características viscosas que define el pistón se describen por el valor de la constante viscosa c_n

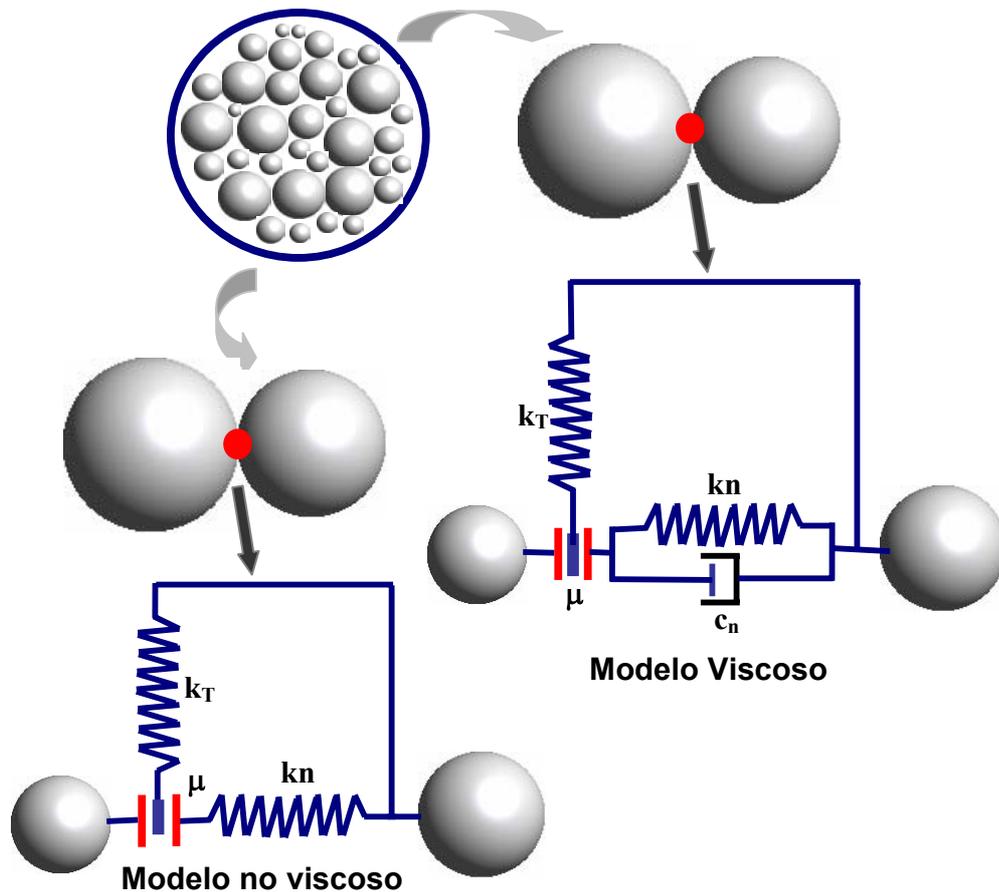


Figura 6: Tipos de modelos de contacto.

Se introduce un amortiguamiento en el contacto con la finalidad de disipar la energía cinética y disminuir las oscilaciones de las fuerzas de contacto. Por esta razón se asume la contribución de una fuerza de amortiguamiento en la componente de fuerza de contacto normal. Por tanto, se puede descomponer las fuerzas de contacto normal F_n , de acuerdo con su naturaleza constitutiva, en su parte elástica F_{ne} y en su respectiva fuerza de contacto de amortiguamiento F_{nd} que caracteriza la parte viscoelástica.

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_{ne} + \mathbf{F}_{nd} \quad (33)$$

El contacto entre partículas también viene caracterizado por la máxima tensión o fuerza que resiste el contacto. Se define por la tanto, la fuerza cohesiva normal \mathbf{R}_n (fuerza máxima en la dirección normal) y la fuerza cohesiva tangencial \mathbf{R}_T (fuerza máxima en la dirección tangencial), a partir del coeficiente de fricción de Coulomb μ , la intensidad de adhesión o adherencia β , y el coeficiente de amortiguamiento (c- en el modelo viscoso). Si el valor del coeficiente β es nulo ($\beta=0$), entonces el contacto no puede soportar fuerzas de tracción.

2.6.2 Fuerzas no viscosas.

Tal y como se ha expuesto anteriormente, las fuerzas elásticas o no viscosas quedan definidas en el modelo a través de unos muelles que simulan la rigidez normal y tangencial del contacto entre partículas.

2.6.2.1 Comportamiento a compresión.

El comportamiento del contacto entre dos partículas sometidas a compresión tiene un carácter lineal en todo su dominio. La relación fuerza desplazamiento es constante y su valor es el de la rigidez normal del modelo.

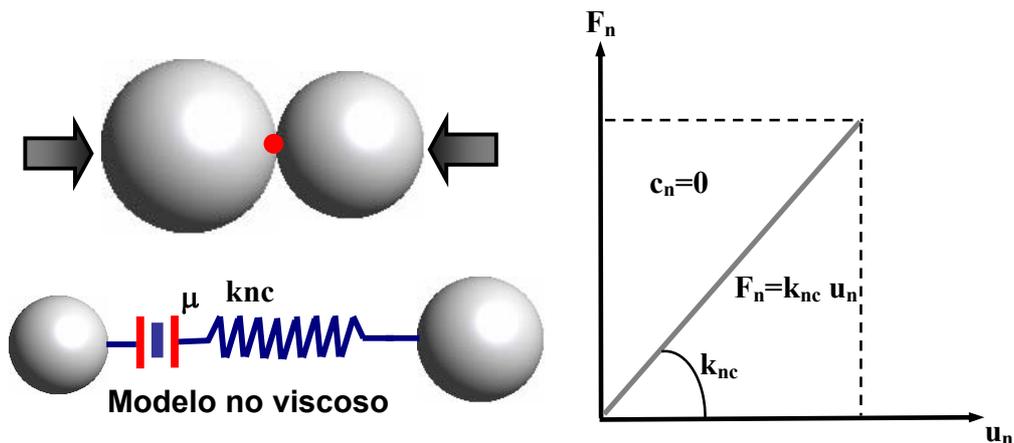


Figura 7: Modelo constitutivo no viscoso. Comportamiento a compresión en la dirección normal

La resistencia máxima del contacto la define el elemento friccional. Cuando la fuerza que se genera en el contacto llega al valor máximo, el propio contacto se rompe, y las dos partículas dejan de interactuar una con la otra.

2.6.2.2 Comportamiento a tracción.

Al igual que para el caso a compresión, el comportamiento a tracción del contacto entre dos partículas puede describirse a partir de un muelle que simula el comportamiento elástico. La fuerza de tracción va creciendo de forma proporcional al desplazamiento de separación de

las dos partículas, hasta llegar a un valor tope, es decir hasta la resistencia del contacto, y a partir de entonces toma un valor nulo.

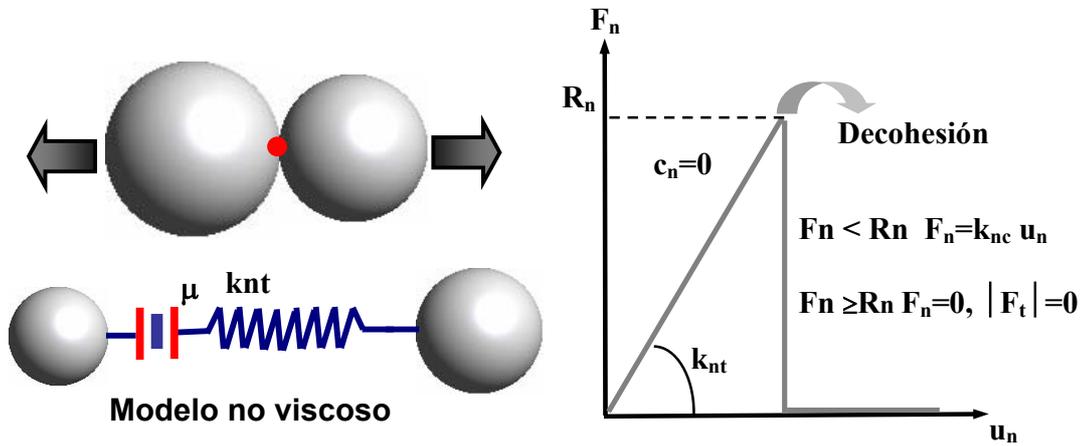


Figura 8: Modelo constitutivo no viscoso. Comportamiento a tracción en la dirección normal

2.6.3 Fuerzas viscosas.

Tal y como se ha expuesto anteriormente, las fuerzas elásticas o no viscosas quedan definidas en el modelo a través de unos muelles que simulan la rigidez normal y tangencial del contacto entre partículas.

2.6.3.1 Comportamiento a compresión.

Podemos descomponer la fuerza que se ejerce en el contacto, en dos tipos bien diferenciados según su naturaleza constitutiva. Por una parte una fuerza elástica, y por la otra una fuerza viscoelástica.

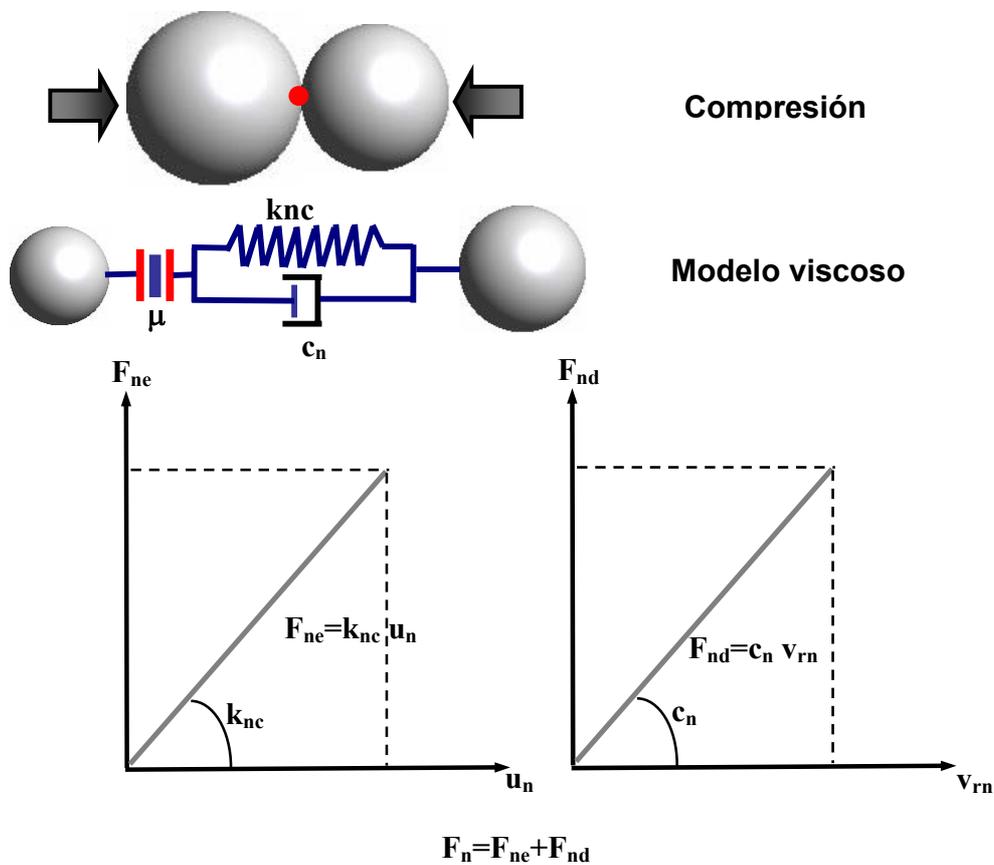


Figura 9: Modelo constitutivo viscoso. Comportamiento a compresión en la dirección normal

Por su parte en el caso del modelo de contacto viscoso la fuerza de amortiguamiento se determina por:

$$F_{nd} = c v_{rn} \quad (34)$$

donde la componente de fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad relativa normal v_{rn} de los centros de las dos partículas en el contacto.

$$\mathbf{v}_{rn} = (\dot{\mathbf{u}}_2 - \dot{\mathbf{u}}_1) \cdot \mathbf{n} \quad (35)$$

2.6.3.2 Comportamiento a tracción.

Para el caso de un modelo viscoso sometido a tracción se describe a continuación las ecuaciones y relaciones constitutivas que lo forman.

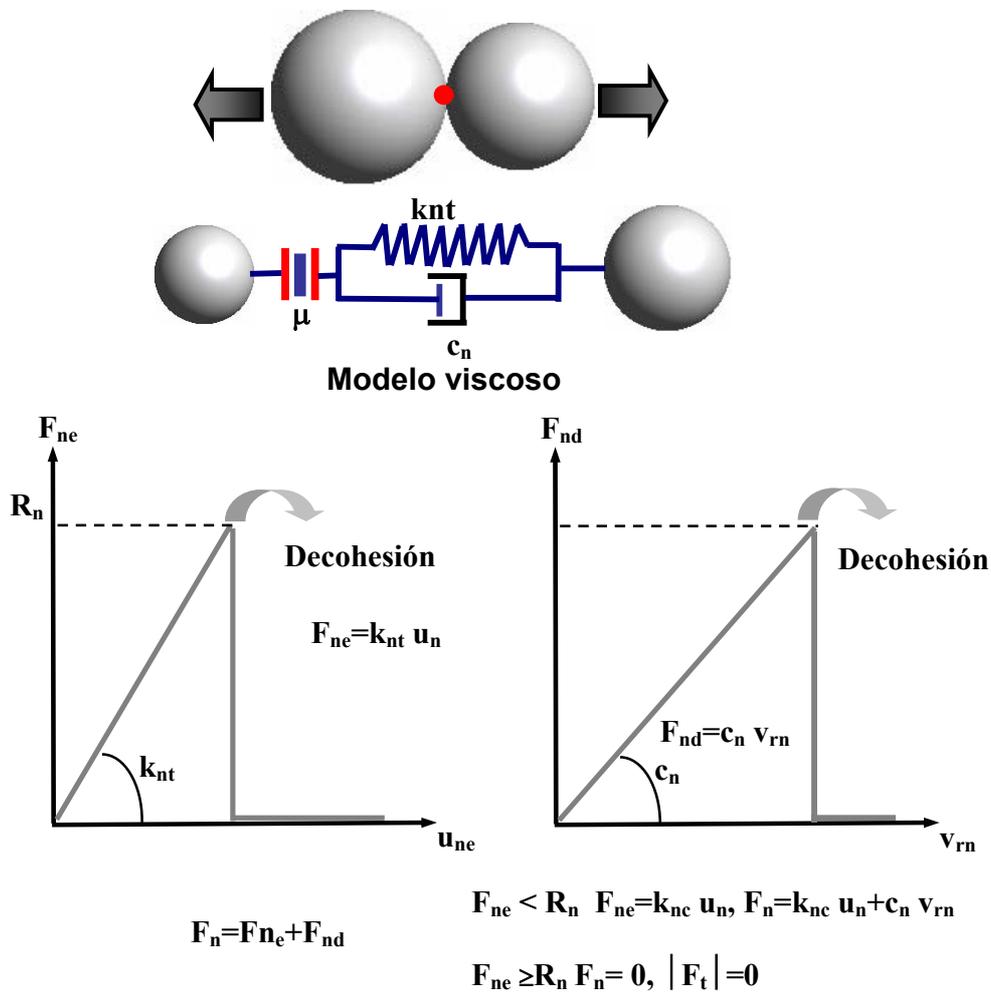


Figura 10: Modelo constitutivo viscoso. Comportamiento a tracción en la dirección normal

El valor de amortiguamiento c se puede tomar como la fracción del amortiguamiento crítico C_{cr} para el sistema de dos cuerpos rígidos con masas m_1 y m_2 , conectadas por un muelle con rigidez k_n [8].

$$C_{cr} = 2 \sqrt{\frac{m_1 m_2 k_n}{m_1 + m_2}} \quad (36)$$

La parte elástica de la fuerza del contacto normal F_{ne} es proporcional a la rigidez normal k_n (k_{nc} – rigidez compresión y k_{nt} - tracción) y a la separación existente entre las partícula u_{rn} .

$$F_{ne} = k_n u_{rn} \quad (37)$$

En el caso de materiales sin cohesión ($\beta = 0$) no podrá desarrollarse fuerzas de contacto normal de tracción:

$$F_{ne} \leq 0 \quad (38)$$

La separación entre partículas u_{rn} se calcula como la distancia entre los centro (d) menos los radios (r_1 y r_2) de las esferas en contacto:

$$u_{rn} = d - r_1 - r_2 \quad (39)$$

donde:

d - distancia entre los centro de las partículas
 r_1, r_2 - radios.

Si $u_{rn} \leq 0$, la fórmula (37) es valida, y por su parte $F_{ne} = 0$.

Si el material es cohesivo ($\beta=1$) las fuerzas del contacto normales pueden ser de compresión o de tracción indistintamente. La fuerza del contacto normal debido a la cohesión es calculada por la ecuación (37), pero en este caso la separación u_{rn} es calculada como la componente relativa del desplazamiento normal entre los puntos en contacto:

$$u_{rn} = u_r \cdot n \quad (40)$$

$$u_{rn} = (X_2^n + \Lambda_2^n r_{c2}) - (X_1^n + \Lambda_1^n r_{c1}) \quad (41)$$

En el momento que se establece la adherencia cohesiva los puntos en cuestión coincide y se establece:

$$X_2^0 + \Lambda_2^0 r_{c2} = X_1^0 + \Lambda_1^0 r_{c1} \quad (42)$$

donde:

X_1^0, X_2^0, X_1^n y X_2^n - denotan las posiciones del centro de las partículas en el sistema de la coordenada global en un instante de tiempo t_0 y el instante de tiempo de estudio t_n . Este aspecto denotando la configuración presente y la configuración cuando la cohesión se ha establecido.

$\Lambda_1^0, \Lambda_2^0, \Lambda_1^n$ y Λ_2^n - son las correspondientes matrices de rotación (matriz de cosenos directores),

r_{c1}, r_{c2} - son los vectores que conectan los centros de la partícula con el punto de contacto en el momento de establecerse la conexión entre esferas.

La fuerza elástica correspondiente a la dirección tangencial se puede calcular por:

$$\mathbf{F}_T = k_T \mathbf{u}_{rT} \quad (43)$$

donde

$$\mathbf{u}_{rT} = \mathbf{u}_r - \mathbf{u}_{rn} \mathbf{n} \quad (44)$$

2.6.4 Fuerzas tangenciales. no viscosas y viscosas.

La existencia de cohesión también implica que existe fuerza de contacto tangencial al mismo. En el contacto se genera una fuerza hasta alcanzar el valor de la resistencia máxima, y a partir de entonces, la fuerza que puede soportar el contacto para el caso de compresión baja hasta un valor fijado por el coeficiente de fricción μ .

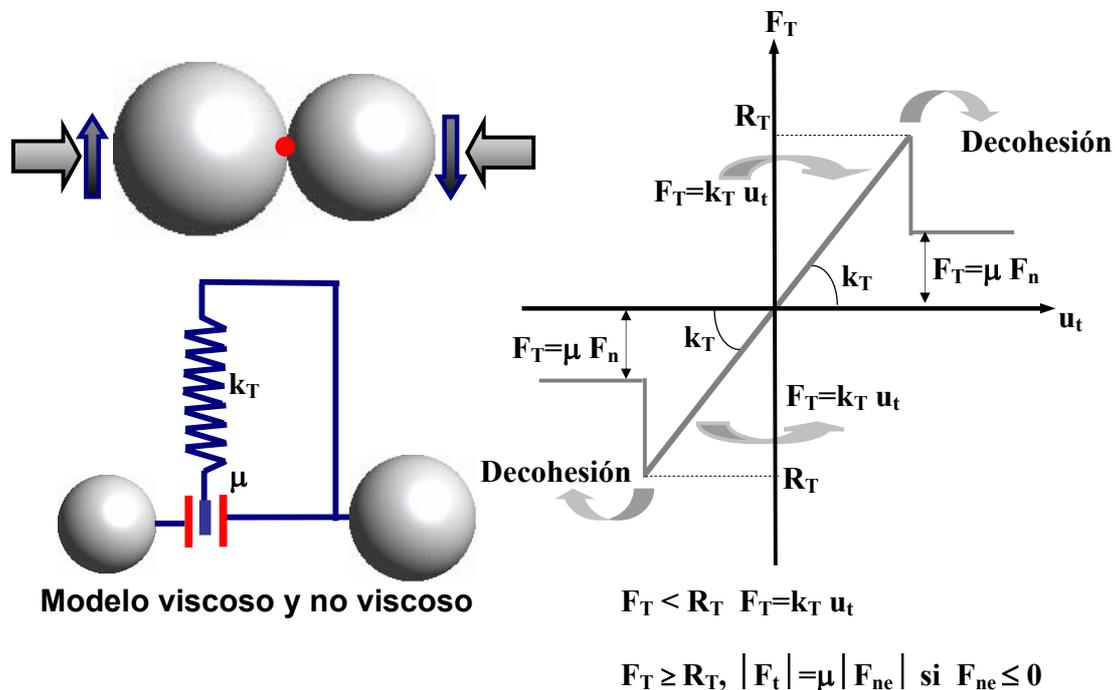


Figura 11: Modelo constitutivo viscoso y no viscoso. Comportamiento de la componente tangencial cuando en la dirección normal esta sometida a compresión.

Se utiliza el mismo modelo tanto para el caso viscoso como el no viscoso.

Para el caso de tracción, la fuerza tangencial, una vez alcanzado el valor máximo, desciende hasta su valor nulo.

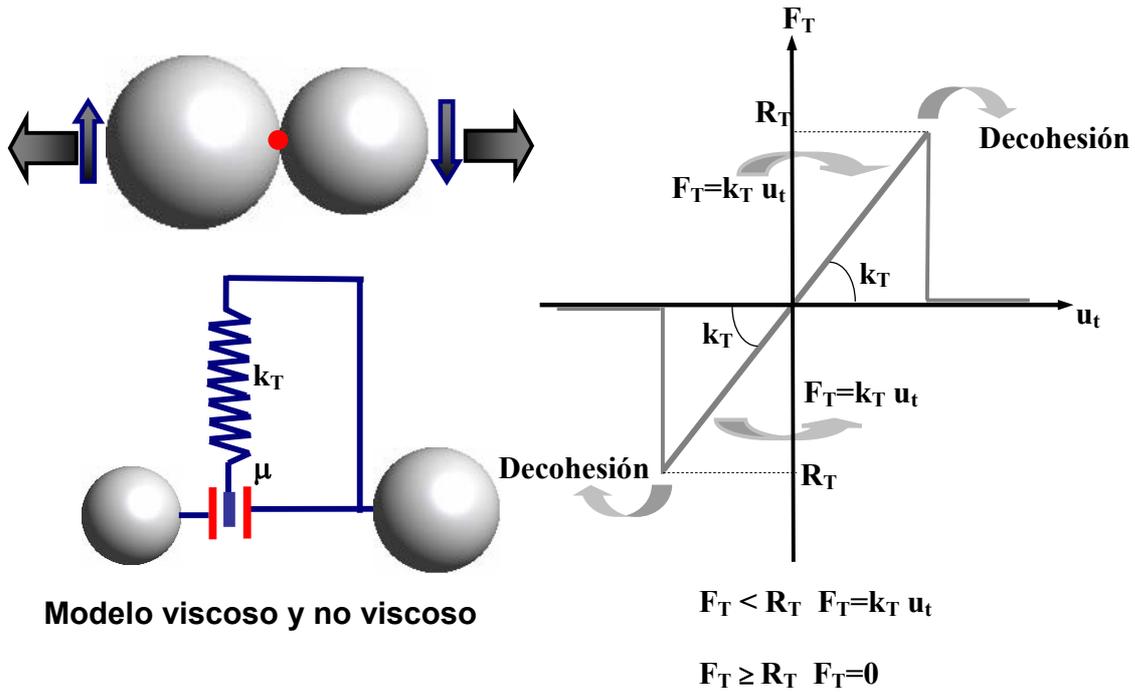


Figura 12: Modelo constitutivo viscoso y no viscoso. Comportamiento de la componente tangencial cuando en la dirección normal esta sometida a tracción.

2.7 Criterio de rotura.

El modelo de contacto presenta un criterio de rotura microestructural que caracteriza el fallo por tracción o por cortante de los contactos entre los elementos distintos. Este aspecto queda delimitado por una superficie de rotura que la caracterizan la resistencia máxima a tracción (en términos de fuerzas) y la resistencia máxima a cortante (en términos de fuerzas).

Empleando el criterio de rotura los contactos entre las partículas pueden romperse (ruptura del aporte por cohesión entre las partículas) debido a las cargas externas de cierto grado de magnitud. Dichos contactos se rompen cuando se excede la fuerzas de las interfases en las direcciones normales o tangenciales ($F_n > R_n$ o $\|F_T\| > R_T$). En el caso de este modelo constitutivo de contacto se considera que se ha perdido totalmente la cohesión del material ($\beta=0$). Existen otros modelos de contacto [9] que de ocurrir este fenómeno se considera pérdida parcial de la cohesión ($0 < \beta < 1$). En la presente formulación, las ataduras cohesivas (aporte por cohesión entre las partículas), es decir los contactos no pueden ser restituidos después de la rotura de los mismos.

Cuando la fuerza normal de tracción alcance un valor igual a R_n el contacto entre elementos distintos se romperá provocado por un fallo a nivel micro de tracción y dejará de existir tal fuerza. De forma análoga cuando la fuerza tangencial alcance un valor de R_T provocará un fallo de cortante microestructural y el contacto entre estos elementos discretos dejará de existir.

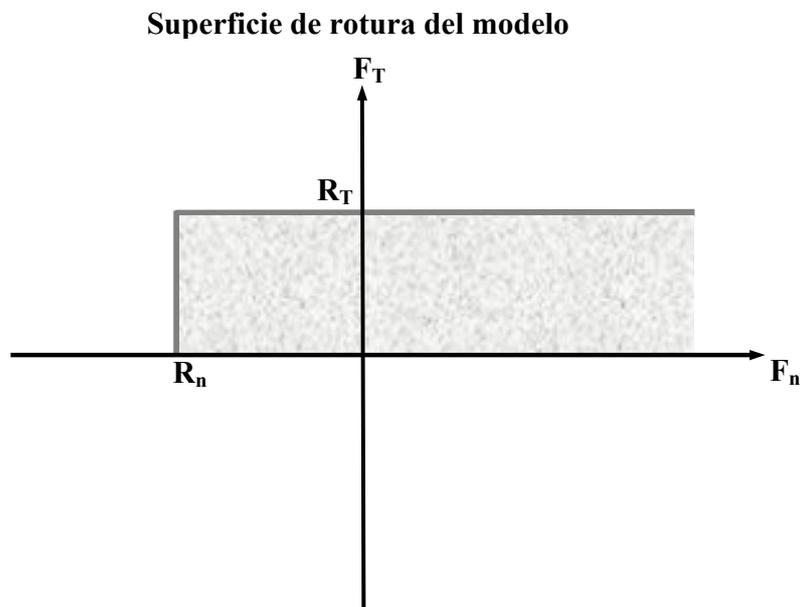


Figura 13: Superficie de rotura del modelo de contacto.

En la ausencia de cohesión o después que la cohesión entre partículas deja de existir la reacción o fuerza tangencial puede causarse por la fricción. Existen dos tipos de modelos básicos de simular los problemas de fricción entre elementos discretos. Estos dos modelos básicos son el modelo de fricción cinemática y el modelo de fricción de Coulomb. En el caso de esta formulación se hace uso del modelo de fricción de Coulomb. En el modelo de Coulomb, se produce un deslizamiento relativo entre los dos elementos distintos cuando la fuerza máxima tangencial \mathbf{R}_T alcanza cierto valor de umbral que es proporcional a la fuerza de contacto. El coeficiente de proporcionalidad entre las fuerzas tangenciales y normales cuando se produce el deslizamiento (descohesión) entre las partículas o elementos discretos “slip”, se denomina coeficiente de fricción de Coulomb. Realizando una abstracción y asumiendo que en el contacto solo existe un el modelo de Coulomb cuando la fuerza tangencial no alcanza el umbral entonces no existe deslizamiento relativo entre los elementos discretos que están en contacto y esta condición se denomina “stick”.

En el modelo de Coulomb el punto clave es la evaluación de las fuerzas de fricción. Estas fuerzas dependen fuertemente de las fuerzas de contacto normales entre elementos distintos cuando estos están en contacto. Como se relacionan esta fuerza normal de contacto es un tema complicado y complejo.

En esta formulación se pueden emplear dos tipos de modelos o leyes de comportamiento de Coulomb: Ley de Coulomb estándar (figura 14) o la Ley regularizada de Coulomb (figura 15).

En ausencia de cohesión o después de producirse la descohesión la fuerza tangencial se calcula por:

$$\mathbf{F}_T = -F_T \frac{\mathbf{v}_{rT}}{\|\mathbf{v}_{rT}\|} \quad (45)$$

donde

\mathbf{v}_{rT} - es la velocidad tangencial relativa al punto del contacto

$$\mathbf{v}_{rT} = \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n} \quad (46)$$

La velocidad relativa \mathbf{V}_r se obtiene de la diferencia de velocidades entre los puntos del contacto. La velocidad del punto de contacto se obtiene de la suma de la velocidad del centro de la partícula i a la que pertenece y el producto de la velocidad de rotación de la misma por la distancia entre el punto de contacto y el centro.

$$\mathbf{v}_r = (\dot{\mathbf{u}}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{c2}) - (\dot{\mathbf{u}}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{c1}) \quad (47)$$

donde:

$\dot{\mathbf{u}}_1, \dot{\mathbf{u}}_2$ y $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2$ - son las velocidades de traslación y rotación de las partículas en contacto.

\mathbf{r}_{c1} y \mathbf{r}_{c2} - son los vectores de conectan los centros de las dos partículas en contacto.

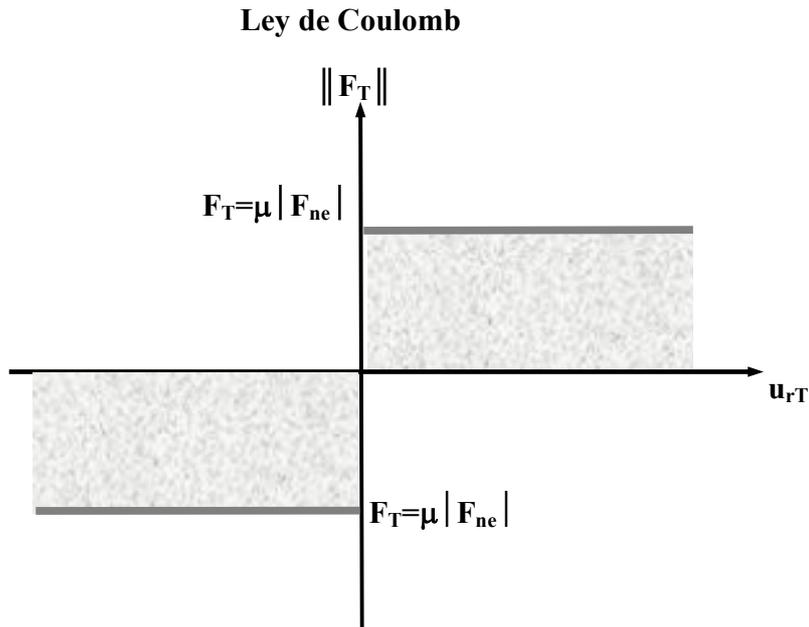


Figura 14: Ley de Coulomb Estándar.

El modelo de Coulomb standard puede ser adoptado para la fricción.

$$\mathbf{F}_T = \mu |\mathbf{F}_n| \quad (48)$$

donde:

μ - Coeficiente de fricción de Coulomb.

Es conocido que la Ley de fricción de Coulomb estándar o clásica produce una oscilación no física de la fuerza de fricción en la solución numérica debido a posible cambio de la dirección de la velocidad de deslizamiento. Para prevenir esta inestabilidad del modelo de fricción de Coulomb, la misma debe ser regularizada (figura 10).

Con la finalidad de evitar oscilaciones en la solución se limita la fuerza de rozamiento a un valor \mathbf{F}_{Ts} . En el algoritmo numérico el modelo de Coulomb tiene que ser regulado para evitar las oscilaciones en la solución. La fuerza de fricción se limita para prevenir el cambio de la dirección de la velocidad tangencial:

$$\mathbf{F}_T = \min(\mu |\mathbf{F}_T|, \mathbf{F}_{Ts}) \quad (49)$$

donde

\mathbf{F}_{Ts} , - es la llamada fuerza que retiene la fricción, es decir, la fuerza que reduciría la velocidad tangencial $\mathbf{v}_i = (\dot{\mathbf{u}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{ci})$ a cero.

Un posible proceso de regularización involucra la descomposición de la velocidad relativa tangencial en una velocidad reversible \mathbf{V}_{rTe}^r e irreversible \mathbf{V}_r^{ir} respectivamente.

$$\mathbf{V}_{rT} = \mathbf{V}_{rT}^r - \mathbf{V}_{rT}^{ir} \quad (50)$$

Esto es equivalente a la formulación del problema de contacto friccional de elastoplásticidad, con lo que se puede ver claramente que la fuerza tangencial de fricción esta relacionada con el desplazamiento \mathbf{u}_{rT} . Primeramente se calcula:

$$\mathbf{F}_T^{\text{Pred}} = \mathbf{F}_T^{\text{Ant}} - \mathbf{k}_T \mathbf{V}_{rT} \Delta t \quad (51)$$

donde:

$\mathbf{F}_T^{\text{Pred}}$ - Fuerza de fricción predictorora.

$\mathbf{F}_T^{\text{Ant}}$ - Fuerza de fricción calculada en el tiempo $t-\Delta t$.

y la condición de descohesión o deslizamiento se chequea por:

$$\phi^{\text{Pred}} = \|\mathbf{F}_T^{\text{Pred}}\| - \mu |\mathbf{F}_n| \quad (52)$$

Si $\phi^{\text{Pred}} \leq 0$, se esta en presencia de un contacto cohesivo (“stick”) y la fuerza de fricción se le asigna el valor de la fuerza de fricción predictorora:

$$\mathbf{F}_T^{\text{Nuevo}} = \mathbf{F}_T^{\text{Pred}} \quad (53)$$

donde:

$\mathbf{F}_T^{\text{Nuevo}}$ - Fuerza de fricción calculada en el tiempo t .

En caso de que $\phi^{\text{Pred}} > 0$, entonces: $\mathbf{F}_T^{\text{Nuevo}} = \mu |\mathbf{F}_n| \frac{\mathbf{F}_T^{\text{Pred}}}{\|\mathbf{F}_T^{\text{Pred}}\|}$ (54)

Ley de Coulomb Regularizada

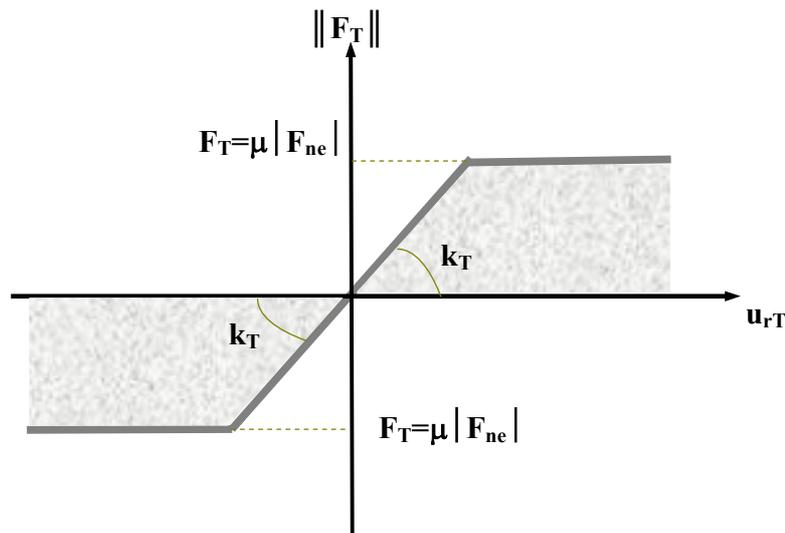


Figura 15: Ley de Coulomb Regularizada.

2.8 Equilibrio cuasi-estático con la inclusión del amortiguamiento Global del sistema de Partículas.

Los códigos dinámicos explícitos satisfacen mejor la simulación de procesos dinámicos, no obstante se pueden aplicar fácilmente a la simulación problemas cuasi-estáticos. Una de las metodologías elaboradas para analizar los problemas cuasi-estáticos con el modelo dinámico es la relajación dinámica [10]. Un factor importante para el éxito de análisis en el de problemas cuasi-estáticos con el código dinámico es aplicación consiste en la aplicación de un amortiguamiento adecuado. En el modelo de los elemento discreto, las oscilaciones con las frecuencias más altas se amortigua con el amortiguamiento impuesto al contacto descrito en la sección anterior. Igualmente en los problemas cuasi-estáticos, es necesario amortiguar las oscilaciones de los modos de vibración más bajos a través de un amortiguamiento exterior o global. Esto puede lograrse aplicando el amortiguamiento viscoso global cerca del valor crítico para las frecuencias más bajas. La velocidad de las cargas también debe corresponder a las propiedades dinámicas del sistema, y debe introducirse durante un tiempo suficientemente largo comparado con el periodo de vibraciones en el modo natural más bajo.

El estado de equilibrio del sistema de partículas puede ser logrado por la aplicación de un amortiguamiento adecuado. A veces es necesario la aplicación de un amortiguamiento para disipar la energía cinética de las partículas que no están en contacto y esta es la justificación para el empleo de un amortiguamiento global del sistema de partículas. En el caso del amortiguamiento global al igual que en el amortiguamiento de contacto existen dos tipos: amortiguamiento viscoso y no viscoso. En los dos casos los términos de amortiguamiento $\mathbf{F}_i^{\text{Amortig}}$ y $\mathbf{T}_i^{\text{Amortig}}$ se agregan a las ecuaciones de movimiento (1) y (2):

$$\mathbf{m}_i \ddot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i^{\text{Amortig}} \quad (55)$$

$$\mathbf{l}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{T} + \mathbf{T}_i^{\text{Amortig}} \quad (56)$$

El cálculo de amortiguamiento global es diferente para el caso viscoso y no viscoso. En el viscos el amortiguamiento que da definido por.

$$\mathbf{F}_i^{\text{amortig}} = -\alpha^{\text{VT}} \mathbf{m}_i \dot{\mathbf{u}}_i \quad (57)$$

$$\mathbf{T}_i^{\text{amortig}} = -\alpha^{\text{Vr}} \mathbf{l}_i \boldsymbol{\omega}_i \quad (58)$$

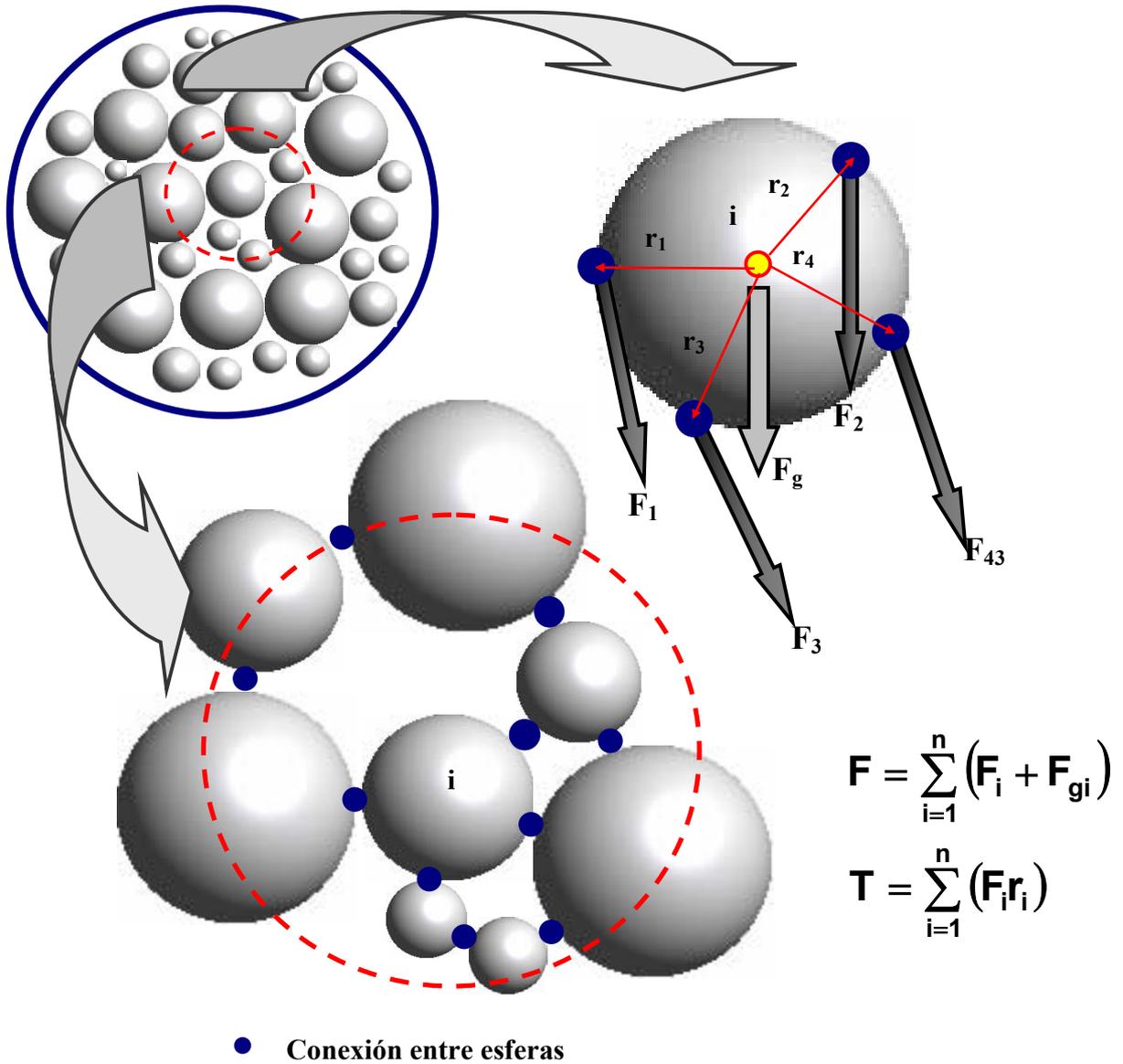


Figura 16 : Fuerzas en el contacto entre partículas o elementos distintos.

y para el caso no viscoso :

$$\mathbf{F}_i^{\text{amortig}} = -\alpha^{nVT} \|\mathbf{F}_i\| \frac{\dot{\mathbf{u}}_i}{\|\dot{\mathbf{u}}_i\|} \quad (59)$$

$$\mathbf{T}_i^{\text{amortig}} = -\alpha^{nVr} \|\mathbf{T}_i\| \frac{\dot{\boldsymbol{\omega}}_i}{\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_i\|} \quad (60)$$

donde: α^{vT} , α^{vr} , α^{nVT} , α^{nVr} son las constantes de amortiguamiento. En las ecuaciones (57-60) queda expresado el amortiguamiento del sistema global para el caso viscoso y no viscoso. En el caso del amortiguamiento viscoso la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad, mientras que en el no viscoso es proporcional a la fuerza y al momento resultante.

2.9 Algoritmo de búsqueda de contacto.

En cada paso de tiempo el contacto se detecta chequeando la separación entre pares de esferas que se consideran en contacto. Para ello cada elemento o esfera tiene relacionadas aquellas esferas en las que está en contacto y las que potencialmente pueden llegar a estar en contacto desde el último paso de tiempo en que se chequearon los contactos. El usuario del programa fija la máxima separación entre esferas admitida (CTOL) para considerar que dos esferas están en contacto. La lista de contactos se actualiza cada cierto intervalo, cuando el máximo desplazamiento acumulado desde el instante en que se determinaron los contactos por última vez de una de las esferas o elementos supera la máxima separación permitida.

La metodología sería la siguiente:

Cuando $u_{\max} = \max_{\substack{i=1,D \\ n=1,N}} \{u_i^n\}$ sea mayor que CTOL realizar la búsqueda de los contactos

- A la lista de posibles contactos de cada esfera se le añaden aquellas esferas que estén a una separación menor de $2 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{CTOL}$ en problemas bidimensionales y de $2 \cdot \sqrt{3} \cdot \text{CTOL}$ en problemas tridimensionales
- Se quitaran de la lista de posibles contacto de una esfera o elemento a aquellas esferas que se separen hasta una distancia mayor a la mencionada

Un valor óptimo de CTOL se halla entre $0.1 \cdot r$ y $0.5 \cdot r$ (r es el radio medio de las esferas), pero también se puede estimar a partir de la curvas de comportamiento del material y en función de las diámetros de las esferas en contacto.

En el análisis de contacto desde el punto de vista computacional se crean dos listas, la de esferas y las de contactos. Estas dos listas están conectadas entre sí y en cada paso de tiempo estas dos listas son actualizadas.

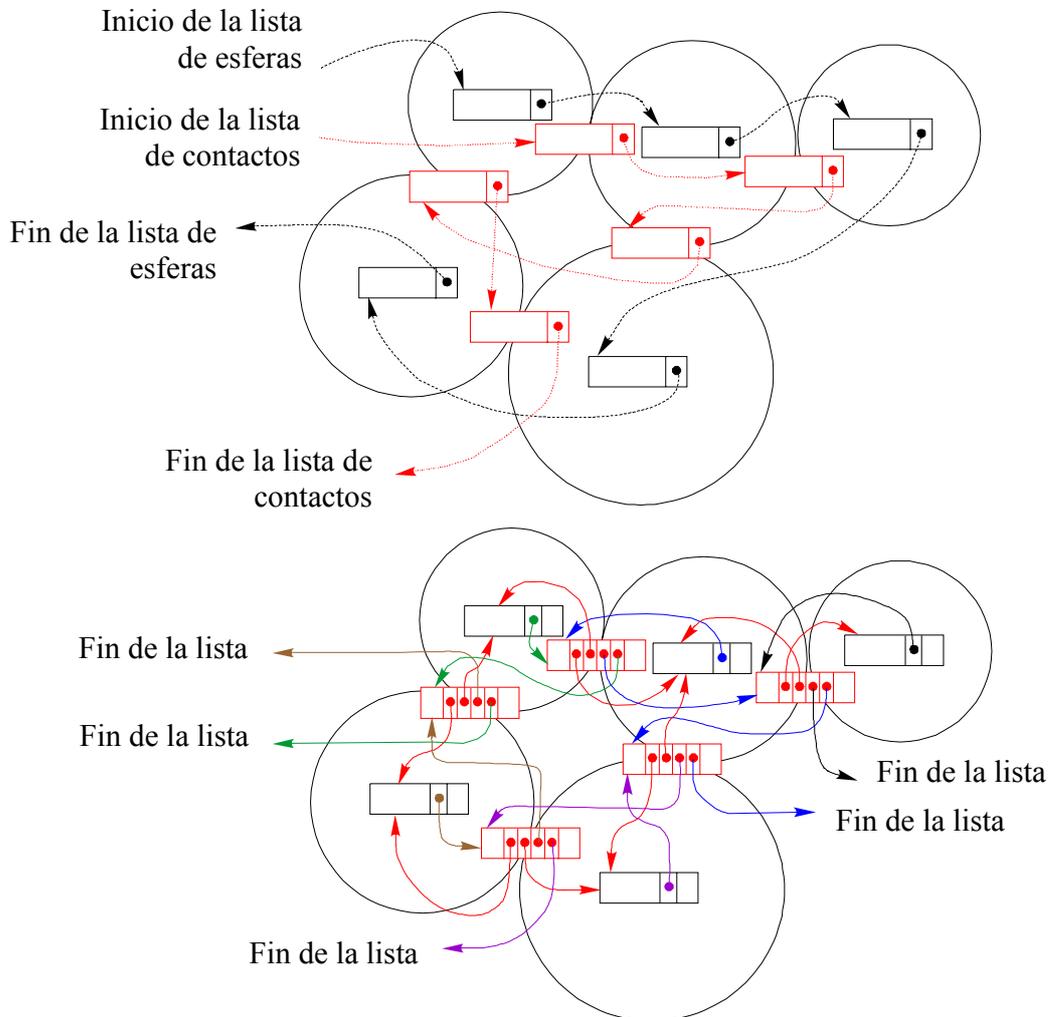


Figura 17: Estructura de las listas desde el punto de vista computacional para la búsqueda del contacto.

En las listas se va guardando la información sobre los contactos existentes y los potenciales o futuros contactos. Esta información se guarda en la lista de nuevas entidades denominadas contactos. La estructura del contacto tiene dos apuntadores a las dos esferas que forman un par de contacto dado. En la lista de forma estructurada se guardan los valores de las componentes de las fuerzas normal y tangenciales del contacto, entre otros parámetros que son calculados. Cuando la vinculación entre elementos distintos es cohesiva se guardan para cada contacto la separación o penetración existente, así como los vectores que conectan los centros de cada esfera con el punto del contacto entre ellas. El indicador próximo de la lista permite formar una lista global de contactos (figura 17).

Las listas enlazadas mostrada en la figura 17 presentan una estructura y una base de datos que permite verificar los contactos existentes eficazmente. Esta estructura permite actualizar en todo momento el estado de ambas listas permitiendo añadir nuevos contactos o eliminar alguno que halla dejado de existir.

2.10 Los efectos de la temperatura en el modelo de desgaste

La influencia de la temperatura en el desgaste se ha tenido en cuenta adaptando la ley de Archard que asume que el ratio de desgaste es proporcional a la presión en el contacto p_n y a la velocidad de deslizamiento v_t :

$$\dot{w} = k \cdot \frac{p_n \cdot v_t}{H} \quad (61)$$

donde: H es una medida de la dureza de la superficie de contacto,
 k es un parámetro adimensional.

Si se asume que H depende de la temperatura T , se puede tener en cuenta su influencia en el desgaste.

$$H = H(T) \quad (62)$$

La fricción se evalúa mediante la ley de Coulomb:

$$p_t = \mu \cdot p_n \quad (63)$$

Operando con las ecuaciones (62) a la (63) se obtiene:

$$\dot{w} = \bar{k} \cdot \frac{p_t \cdot v_t}{H(t)} = \bar{k} \cdot \frac{\dot{D}}{H(t)} \quad (64)$$

donde:

\dot{D} es el ratio de disipación friccional,

$$\bar{k} = \frac{k}{\mu}$$

2.11 Ecuaciones del problema termo-mecánico

A las ecuaciones del movimiento (1) y (2) descritas anteriormente se les debe añadir la ecuación de balance del calor:

$$m_i \cdot c \cdot \dot{T}_i = Q_{gen} - (Q_{cp} + Q_{cb} + Q_{rd}) \quad (65)$$

donde:

- m_i - es la masa de la partícula i -ésima,
- c - es la capacidad calorífica de la partícula,
- Q_{gen} - es el calor generado debido a la energía disipada por la fricción y que es absorbida en forma de calor por la partícula,
- Q_{cp} - es el calor transferido por conducción entre partículas,
- Q_{cb} - es el calor transferido por conducción al contorno,
- Q_{rd} - es el calor irradiado entre partículas y al entorno.

El calor generado en un contacto se puede obtener de la siguiente expresión:

$$\tilde{Q}_{gen} = \chi \cdot |F_T \cdot v_{rT}| \quad (66)$$

donde χ es la parte del trabajo de fricción que se transforma en calor y el resto de variables involucradas se han descrito anteriormente.

Se asume que el calor disipado por fricción en un contacto es absorbido equitativamente por las dos partículas en contacto. El calor generado Q_{gen} será la suma del calor generado en cada uno de los contactos ($\frac{1}{2} \tilde{Q}_{gen}$) de la partícula con sus vecinas.

El calor transferido por conducción entre dos partículas se estima como el calor que se conduce en una barra de longitud d igual a la distancia entre los centros de las partículas y de sección equivalente \bar{A} (función del tamaño de las partículas):

$$\tilde{Q}_{cp} = \frac{\kappa}{d} \cdot \bar{A} \cdot (T_i - T_j) \quad (67)$$

donde:

- κ es la conductividad del material,
- T_i y T_j son las temperaturas de las partículas i y j en contacto.

El calor transferido por conducción Q_{cp} tiene en cuenta la contribución de todas las partículas en contacto con la partícula i -ésima de estudio.

Integrando la ecuación de balance del calor mediante un esquema explícito de Euler hacia delante se obtiene:

$$T^{n+1}_i = T^n_i + \frac{\Delta t}{m_i \cdot c} \cdot [Q^n_{gen} - (Q^n_{cp} + Q^n_{cb} + Q^n_{rd})] \quad (68)$$

El problema térmico se soluciona para una configuración geométrica dada y el calor generado por fricción se obtiene de la solución del problema mecánico. Las temperaturas halladas para cada partícula modifican las propiedades del material que se usaran en el paso siguiente del problema mecánico.

2.12 El desgaste

Integrando el ratio de desgaste a lo largo del tiempo se obtiene el desgaste producido.

$$\mathbf{w} = \int \mathbf{w} \, dt \quad (69)$$

El desgaste se va integrando a lo largo del tiempo para cada una de las partículas que constituyen la superficie externa de la herramienta de excavación. Una vez dicho desgaste alcanza el valor del tamaño de la partícula, se considera que la partícula ya no forma parte de la herramienta. Por tanto, la geometría de la herramienta se modifica a lo largo del tiempo. Tal como pasaría en la realidad en un proceso de excavación.